

# Mathematik für Informatik 2

Klausurvorbereitung  
Marvin Borner



EBERHARD KARLS  
UNIVERSITÄT  
TÜBINGEN



Sommersemester 2022

Dies ist meine WIP Zusammenfassung, welche hauptsächlich mir dienen soll. Ich schreibe außerdem ein inoffizielles Skript, welches auf <https://marvinborner.de/mathe2.pdf> zu finden ist.

## Inhalt

<b>1</b>	<b>Negative Zahlen in <math>\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}</math></b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Reduzibilität</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>4</b>
3.1	Gleichungen mit komplexen Zahlen lösen . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Vektorräume</b>	<b>4</b>
4.1	Prüfen auf Erzeugendensystem/Basis . . . . .	4
4.2	Basis ermitteln . . . . .	4
4.3	Prüfen auf lineare Unabhängigkeit . . . . .	5
4.4	Prüfen auf Untervektorraum . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Prüfen auf Linearität</b>	<b>5</b>
5.1	Homomorphismus . . . . .	5
<b>6</b>	<b>Matrizen</b>	<b>6</b>
6.1	Matrizen transponieren . . . . .	6
6.2	Rang bestimmen . . . . .	6
6.3	Bild bestimmen . . . . .	6
6.4	Kern bestimmen . . . . .	6
6.5	Determinante bestimmen . . . . .	6
6.5.1	Regel von Sarrus . . . . .	6
6.5.2	Gaußsches Eliminationsverfahren . . . . .	6
6.5.3	Laplacescher Entwicklungssatz . . . . .	6
6.6	Matrizen invertieren . . . . .	7
6.6.1	Adjunktenverfahren . . . . .	7
6.7	Cramersche Regel . . . . .	7
6.7.1	Gauß-Jordan-Algorithmus . . . . .	7
6.8	Charakteristisches Polynom bestimmen . . . . .	8
6.9	Eigenwerte bestimmen . . . . .	8
6.10	Eigenvektoren bestimmen . . . . .	8
6.11	Eigenraum bestimmen . . . . .	9
6.12	Diagonalmatrix und invertierbare Matrix bestimmen . . . . .	10

## 1 Negative Zahlen in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Solange  $n$  addieren, bis die Zahl positiv ist.

**Beispiel:** Äquivalenzklassen in  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ .

1.  $[-2] = [4]$
2.  $[-7] = [5]$

## 2 Reduzibilität

Generell: Bei Polynomen der Grade 2/3 prüfen auf Nullstellen, da  $f = (x - a)g$  reduzibel mit  $a$  NS. Bei Grad 4 Spezialfall der Zelegung in zwei irreduzible Polynome zweiten Grades beachten (siehe Beispiel).

Bei  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$  typischerweise jegliche Kombinationen ausprobieren und NS finden.

**Beispiel:** Reduzibilität von  $f = x^4 + 2x^2 + 1$  in  $\mathbb{R}[X]$ :

Man erkennt schnell, dass  $f$  keine NS in  $\mathbb{R}$  besitzt, da die Exponenten jeweils positiv sind.

**ALLERDINGS:** Polynome in Grad 4 sind durch Polynome folgender Grade reduzibel:

$$4 = 4 + 0 = 1 + 3 = 1 + 1 + 2 + 2 = 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Eine Zerlegung in ein Polynom mit Graden  $4+0$  wäre der irreduzible Fall. Alle Zerlegungen mit 1 stellen den Fall einer Nullstelle dar, da dort ein Linearfaktor existiert. Dann bleibt hier der Fall  $2 + 2$ .

Dann muss die Zerlegung existieren:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + ac + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

Durch die Koeffizienten von  $f$  entsteht ein LGS:

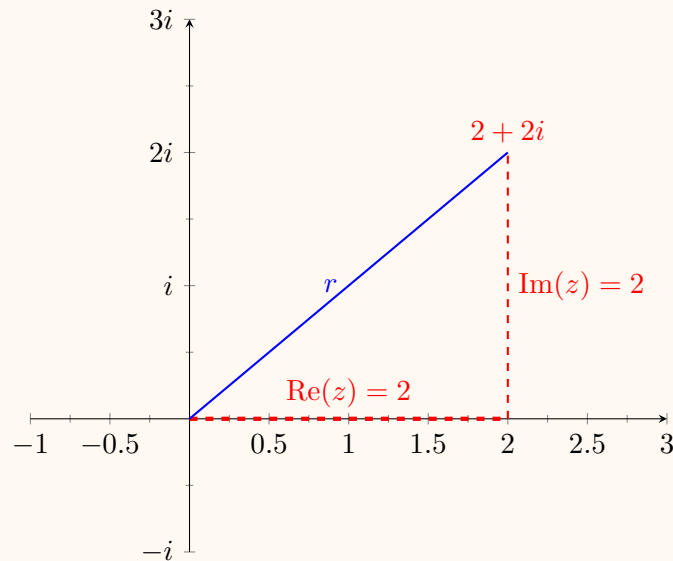
$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ b + ac + d &= 2 \\ ad + bc &= 0 \\ bd &= 1 \end{aligned}$$

Mit der Lösung  $a = c = 0$  und  $b = d = 1$  lässt sich  $f$  in  $(x^2 + 1)(x^2 + 1)$  zerlegen.

## 3 Komplexe Zahlen

### 3.1 Gleichungen mit komplexen Zahlen lösen

**Beispiel:** Bestimmen von  $z$  bei  $z^3 = 2 + 2i$ .



Zuerst bestimmt man die Exponentialdarstellung mittels des Winkels. In diesem Fall ist  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .  $r$  lässt sich mit Pythagoras berechnen als  $r^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \implies r = \sqrt{8}$ . Dann ist  $z^3 = 2 + 2i = \sqrt{8}e^{i(\frac{\pi}{4} + k2\pi)}$ . Es folgt mit  $k = 0, 1, 2$ :

$$z_k = (\sqrt{8})^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\pi}{4} + k2\pi) \cdot \frac{1}{3}} = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{12} + k\frac{2}{3}\pi)}.$$

Alle Lösungen liegen dann auf dem imaginären Kreis.

## 4 Vektorräume

### 4.1 Prüfen auf Erzeugendensystem/Basis

Prüfen, ob  $E = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis bzw. ein Erzeugendensystem von Vektorraum  $V$  ist:

0. Für Basis ggf. zuerst auf lineare Unabhängigkeit prüfen zwecks Effizienz (wenn offensichtlich, sonst sowieso ZSF in nächsten Schritten)
1. Matrix  $A$  erstellen mit Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  als Zeilen untereinander
2. Rang von  $A$  bestimmen
3. Dimension von  $V$  bestimmen
  - wenn  $\text{rank}(A) = \dim(V)$ , dann  $E$  Erzeugendensystem
  - wenn zusätzlich  $\text{rank}(A) = n$ , dann  $E$  Basis
4. Wenn keine Basis: Basis ermitteln/ergänzen:
  - wenn  $\text{rank}(A) < \dim(V)$ , dann alle linear unabhängigen Vektoren (nicht-Nullzeilen der ZSF) zu einer Basis ergänzen (z.B. durch passende Einheitsvektoren)
  - wenn  $\text{rank}(A) = \dim(V) < n$ , dann linear abhängige Vektoren streichen

ODER über Determinante  $\neq 0$  (TUDU)

### 4.2 Basis ermitteln

- Spalten einer Matrix bilden dessen Basis

### 4.3 Prüfen auf lineare Unabhängigkeit

Anwenden des Gauß-Algorithmus:

**Beispiel** mit  $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$  und  $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 11 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man erkennt die lineare Unabhängigkeit: Die Vektoren bilden eine Basis in  $\mathbb{R}^3$ .

### 4.4 Prüfen auf Untervektorraum

Über Untervektorraumaxiome:

1.  $0 \in U$
2.  $x, y \in U \implies x + y \in U$
3.  $x \in U, \lambda \in K \implies \lambda x \in U$

Über Kern/Bild:

Wenn man zeigen soll, dass eine Menge einen Untervektorraum darstellt, ist es sinnvoll die Tatsache zu verwenden, dass sowohl Kern als auch Bild immer Untervektorräume darstellen.

**Beispiele:** Schreiben einer Menge als Kern zum Beweis des Untervektorraums.

1. Sei  $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ . Dies lässt sich schreiben als Matrixvektorprodukt mit  $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : (1, -1, -1)(x_1, x_2, x_3)^\top = 0\}$ . Dann ist  $U$  wegen der Definition des Kerns mit  $U = \{x \in V : Ax = 0\}$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ .

2. Sei  $U = \{(u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2u_1 + 3u_2 - u_3 \\ u_1 - 4u_2 + 3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ . Dies lässt sich schreiben als

Matrixvektorprodukt mit  $U = \{(u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} (u_1, u_2, u_3)^\top =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ . Dann ist  $U$  wegen der Definition des Kerns mit  $U = \{x \in V : Ax = 0\}$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^3$ .

**Beispiel:** Schreiben einer Menge als Bild zum Beweis des Untervektorraums.

Sei  $U = \{(2x, -3x)^\top : x \in \mathbb{R}\}$ . Dies lässt sich schreiben als  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} x : x \in \mathbb{R} \right\}$ . Dann ist  $U$  wegen der Definition des Bildes mit  $U = \{Ax : x \in V\}$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^2$ .

## 5 Prüfen auf Linearität

### 5.1 Homomorphismus

Beide Bedingungen lassen sich gemeinsam prüfen mit:

$$f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

## 6 Matrizen

### 6.1 Matrizen transponieren

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

### 6.2 Rang bestimmen

1. Matrix in Zeilenstufenform bringen
2. Die Anzahl aller Zeilen, die nicht vollständig aus Nullen bestehen, entspricht dem Rang

### 6.3 Bild bestimmen

1. Transponierte Matrix  $A^T$  in Zeilenstufenform bringen
2. Umgeformte Matrix erneut transponieren
3. Die Menge aller Linearkombinationen der Spalten, die nicht vollständig aus Nullen bestehen, entspricht dem Bild

### 6.4 Kern bestimmen

1. Gleichungssystem  $A \cdot v = 0$  aufstellen (mit  $A \in K^{m \times n} \implies v \in K^{n \times 1}$ )
  - $A$  ist dann eine Abbildungsmatrix
2. Gleichungssystem in Zeilenstufenform bringen
3. Lösung (in Abhängigkeit von Parametern) als Menge schreiben

### 6.5 Determinante bestimmen

#### 6.5.1 Regel von Sarrus

Gilt bei  $3 \times 3$ -Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(A) = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$$

#### 6.5.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

1. Gauß nutzen für Zeilenstufenform (rechte obere Dreiecksmatrix)
  - bei jeder Vertauschung der Zeilen muss die Determinante mit  $-1$  multipliziert werden
2. Die Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente:

$$\det(A) = (-1)^{\#\text{Vertauschungen}} \cdot a'_{11} \cdot \dots \cdot a'_{nn}$$

#### 6.5.3 Laplacescher Entwicklungssatz

1. Wähle Zeile/Spalte aus, nach welcher entwickelt wird (optimalerweise möglichst viele Nullen)
2. Startpunkt als Faktor aufschreiben und mit der Determinanten der Matrix multiplizieren, die entsteht, wenn die gesamte derzeitige Zeile/Spalte gestrichen wird (abhängig von Schachbrettmuster ggf. mit  $-1$  multiplizieren)

3. 2 wiederholen für alle Elemente der gewählten Spalte/Zeile und addieren

**Beispiel:** Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

## 6.6 Matrizen invertieren

Generell: Für  $2 \times 2$ -Matrizen empfiehlt sich das **Adjunktenverfahren**. Für  $3 \times 3$ -Matrizen empfiehlt sich das **Adjunktenverfahren** sowie die **Cramersche Regel**. Bei größeren Matrizen oder bei Matrizen mit vielen Nullen empfiehlt sich der **Gauß-Jordan-Algorithmus**.

Wichtig ist: Matrizen lassen sich nur invertieren, wenn  $n \times n$  und

$$\text{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A^{-1} \text{ existiert.}$$

### 6.6.1 Adjunktenverfahren

Für  $n \times n$ -Matrizen: TUDU adj

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Für  $2 \times 2$ -Matrizen:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## 6.7 Cramersche Regel

1.  $\det(A)$  berechnen und  $\det(A) \neq 0$  prüfen
2. Einzelne Einträge der Lösung  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$  mit  $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$  bestimmen ( $A_i$  ergibt sich, wenn die  $i$ -te Spalte von  $A$  durch den Vektor  $b$  ersetzt wird)

### 6.7.1 Gauß-Jordan-Algorithmus

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix  $(A \mid E_n)$  bilden:

$$(A \mid E_n) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

2. Gaußsches Eliminationsverfahren anwenden, um die linke Seite auf die Einheitsmatrix zu bringen:

$$(E_n \mid A^{-1}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{array} \right)$$

3. Die Matrix auf der rechten Seite entspricht dem Inversen von  $A$



## 6.8 Charakteristisches Polynom bestimmen

Determinante von  $A - \lambda E_n$  abhängig von  $\lambda$  bestimmen:

$$P_A = \det(A - \lambda E_n)$$

**Beispiel:** Mit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ :

Lösen durch Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} P_A &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^2(\lambda - 6) \end{aligned}$$

## 6.9 Eigenwerte bestimmen

1. Charakteristisches Polynom  $P_A$  bestimmen
2. Nullstellen von  $P_A$  sind Eigenwerte

**Beispiel:** Mit  $P_A = -\lambda^2(\lambda - 6)$ :

$$\begin{aligned} -\lambda^2(\lambda - 6) &= 0 \\ \implies \lambda_{1,2} = 0 \quad \wedge \quad \lambda_3 = 6 \end{aligned}$$

## 6.10 Eigenvektoren bestimmen

1. Eigenwerte  $\lambda_i$  bestimmen
2. Für jedes  $\lambda_i$  lösen:

$$V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i E_n)$$

3. Die Lösungen werden jeweils abhängig von einer Variable sein  $\rightarrow$  linearen Spann aufstellen

**Beispiel:** Mit  $\lambda_{1,2} = 0$ ,  $\lambda_3 = 6$  und  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ :

1. Eigenvektor für  $\lambda_1 = 0$  berechnen:

$A - \lambda_1$  umformen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gleichung  $\ker(A - \lambda_1) \implies A - \lambda_1 = 0$  lösen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ \implies x_1 &= -x_2 + 2x_3 \\ \implies x_2 &= \dots = x_2 \\ \implies x_3 &= \dots = x_3 \end{aligned}$$

Linearen Spann aufstellen:

$$V_0 = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Eigenvektor für  $\lambda_3 = 6$  berechnen:

$A - \lambda_3$  umformen:

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 1 & -2 \\ 1 & 1-6 & -2 \\ -2 & -2 & 4-6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gleichung  $\ker(A - \lambda_3) \implies A - \lambda_3 = 0$  lösen durch LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 0 \quad \wedge \quad 2x_2 + x_3 = 0 \\ \implies x_1 &= -\frac{x_3}{2} \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{x_3}{2} \quad \wedge \quad x_3 = x_3 \end{aligned}$$

Linearen Spann aufstellen:

$$V_6 = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

## 6.11 Eigenraum bestimmen

1. Eigenvektoren  $V_{\lambda_i}$  bestimmen
2. Linearen Spann aller Eigenvektoren aufstellen

**Beispiel:** Mit  $V_0 = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  und  $V_6 = \text{Lin} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ :

$$\mathbb{L} = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

## 6.12 Diagonalmatrix und invertierbare Matrix bestimmen

Gesucht werden Lösungen von  $S^{-1}AS = D$  mit der invertierbaren Matrix  $S$  und der Diagonalmatrix  $D$ .

1. Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$  bestimmen
2. Die Spalten der invertierbaren Matrix  $S$  entsprechen den Eigenvektoren
3. Die Elemente der Diagonalen der Diagonalmatrix entsprechen den Eigenwerten

**Beispiel:** Mit  $\lambda_{1,2} = 0$ ,  $\lambda_3 = 6$  sowie  $V_0 = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  und  $V_6 = \text{Lin} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$